Спеціалізована школа № 7 ім. М. Т. Рильського
м. Києва

Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень

Алгебра та початки аналізу 10 клас
Рівень стандарту

Волошина Валентина Іванівна
вчитель математики
вчитель вищої категорії
вчитель - методист

Київ 2017

Тема уроку: Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень.

Мета уроку:

Повторити деякі перетворення графіків функцій. Вдосконалювати навички побудови графіків в цілому.

Навчати побудові графіків тригонометричних функцій аналогічних рівнянню гармонічного коливання за допомогою перетворень.

Провести аналогію побудови графіків синусоїди і графіків траєкторії руху коливання та інших різноманітних явищ, що описуються тригонометричними функціями.

Розвивати акуратність в побудовах, увагу, комунікативні компетентності. Навчати самоконтролю та взаємоконтролю.

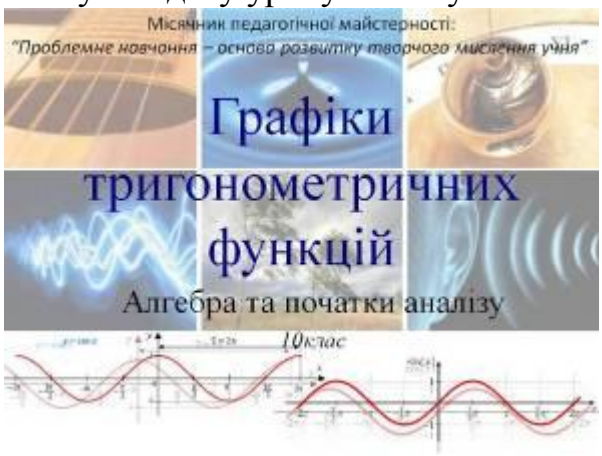
Виховувати вміння працювати в парі та самостійно. Підтримувати інтерес до математики. Розвивати увагу, працездатність, вміння мислити та застосовувати здобуті знання.

Обладнання: Презентація **PowerPoint** (інтерактивний супровід уроку); відеофрагмент «Коливання. Графіки тригонометричних функцій в житті та природі»; Картка контролю теоретичних знань. На дошці: графіки функцій та їх властивості, модель тригонометричного кола, інформація про функції в природі.

Хід уроку:

I. Мотивація навчальної діяльності

Організаційні питання, щодо початку уроку. Вчитель повідомляє тему уроку, роздає картки контролю теоретичних знань (завдання виконуються пізніше), викликає до дошки учнів для перевірки домашнього завдання. В зошитах записують дату уроку та тему.



II. Актуалізація опорних знань. Перевірка домашньої роботи.

Пари учнів отримують експрес-завдання: накреслити синусоїду, косинусоїду та тангенсоїду (один учень заповнює таблицю значень функції, другий – будує графік функції). Експрес-завдання виконується 2 хвилини на аркушах $2 \times A4$ маркером і вивішуються на дошці для наступної перевірки.

Перевірка домашнього завдання проводиться швидко, з елементами обговорення правильності виконаних обчислень, повторенням періодичності тригонометричних функцій та обговоренням перетворень графіків у разі їх побудови. Формування навичок критичного мислення.

№ 309 *(перевірка правильності виконання на дошці)*

Знайдіть найменший додатній період функції:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\cos 4x$; 3) $y=tg5x$; 4) $y=tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $y=\cos\frac{x}{4}$;

6) $y=ctg\frac{x-2}{2}$.

Розв'язання

1) $y=\sin 2x$. Найменший додатній період функції $y=\sin x$; дорівнює 2π, а функції $y=\sin kx$ $T=\frac{2\pi}{|k|}$. $k=2$, отже, $T=\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

2) $y=\cos 4x$. Найменший додатній період функції $y=\cos x$; дорівнює 2π, а функції $y=\cos kx$ $T=\frac{2\pi}{|k|}$. $k=4$, отже, $T=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

3) $y=tg5x$. Найменший додатній період функції $y=tgx$; дорівнює π, а функції $y=tgkx$ $T=\frac{\pi}{|k|}$. $k=5$, отже, $T=\frac{\pi}{|5|}=\frac{\pi}{5}$.

4) $y=tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Найменший додатній період функції $y=tgx$; дорівнює π, а функції $y=tgkx$ $T=\frac{\pi}{|k|}$. $k=1$, отже, $T=\pi$.

5) $y=\cos\frac{x}{4}$. Найменший додатній період функції $y=\cos x$; дорівнює 2π, а функції $y=\cos kx$ $T=\frac{2\pi}{|k|}$. $k=\frac{1}{4}$, отже, $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=\frac{2\cdot 4\pi}{1}=8\pi$.

6) $y=ctg\frac{x-2}{2}$. Найменший додатній період функції $y=ctgx$; дорівнює π, а функції $y=ctgkx$ $T=\frac{\pi}{|k|}$. $k=\frac{1}{2}$, отже, $T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

№ 310 (1,2) *(перевірка виконання в зошиті)*

Знайдіть найбільше і найменше значення функції та її період:

1) $y=\sin x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\sin 2x$;

2) $y=\sin 2x\cdot\cos 5x+\cos 2x\cdot\sin 5x$.

Розв'язання

1) $y=\sin x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\sin 2x$; $y=\sin(x-2x)$; $y=\sin(-x)$; $y=-\sin x$.
$-1\le-\sin x\le 1$, $T=2\pi$. Найменше значення -1, найбільше 1, період 2π.

2) $y=\sin 2x\cdot\cos 5x+\cos 2x\cdot\sin 5x$; $y=\sin(2x+5x)$; $y=\sin 7x$; .

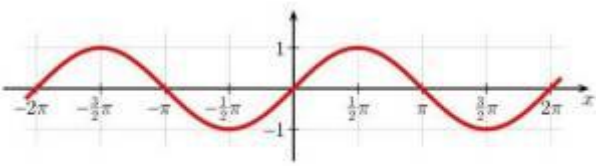
$-1 \le \sin 7x \le 1$, $T = \dfrac{2\pi}{7}$. Найменше значення -1, найбільше 1, період $\dfrac{2\pi}{7}$.

III. Перевірка виконання експрес-завдання.

Перевірка роботи учнів в парах:

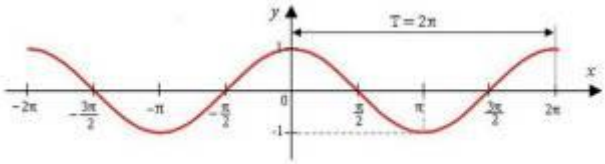
y = sin x

Синусоїда

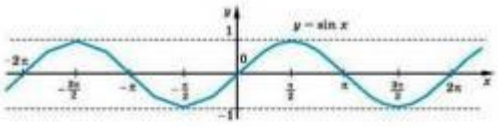


y = cos x

Косинусоїда



Додаткові слайди:



1. *Область визначення:* $x \in R$ (x — будь-яке дійсне число). $D(\sin x) = R$
2. *Область значень:* $y \in [-1; 1]$. $E(\sin x) = [-1; 1]$
3. *Функція* **непарна**: $\sin(-x) = -\sin x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична з періодом* $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. *Точки перетину з осями координат:* Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in Z \end{cases}$
6. *Проміжки знакосталості:*

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in Z$

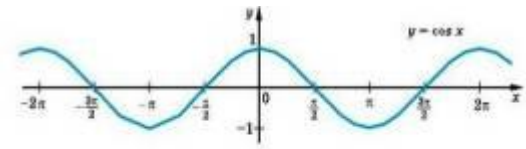
7. *Проміжки зростання і спадання:*

функція $\sin x$ зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$,

і спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$.

8. *Найбільше значення функції дорівнює 1 при* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Найменше значення функції дорівнює -1 *при* $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.



1. *Область визначення:* $x \in R$ (x — будь-яке дійсне число). $D(\cos x) = R$
2. *Область значень:* $y \in [-1; 1]$. $E(\cos x) = [-1; 1]$
3. *Функція* **парна**: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy).
4. *Функція періодична з періодом* $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
5. *Точки перетину з осями координат:* Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$
6. *Проміжки знакосталості:*

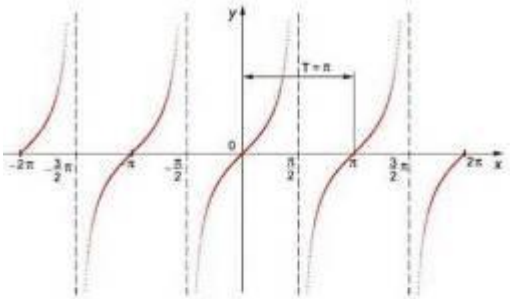
$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$

7. *Проміжки зростання і спадання:*

функція $\cos x$ зростає на кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k], k \in Z$,
і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in Z$.

8. *Найбільше значення функції дорівнює 1 при* $x = 2\pi k, k \in Z$.
Найменше значення функції дорівнює -1 *при* $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.



1. *Область визначення:* $D(\operatorname{tg} x)$: $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
2. *Область значень:* $y \in R$. $E(\operatorname{tg} x) = R$
3. *Функція* **непарна**: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична з періодом* $T = \pi$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат:* Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in Z \end{cases}$
6. *Проміжки знакосталості:*

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$

$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$

7. *Проміжки зростання і спадання:*

функція $\operatorname{tg} x$ зростає на кожному з проміжків своєї області визначення,
тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$.

8. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

Висвітлення додаткових слайдів відбуваються по необхідності. Елементи імпровізації можливі за допомогою меню з посиланнями на різні слайди презентації. Перевірка експрес-завдання відбувається з порівнянням графіків синусоїди та косинусоїди зображених на інтерактивній дошці. Помилки в роботах учнів виправляються на дошці коректором. Повторюються деякі властивості графіків тригонометричних функцій:

- нулі функції;
- періодичність;
- точки перетину з віссю Оу.

IV. Постановка проблеми: «Що спільного між музикою та світлом?»

Вчитель:

- Що спільного між музикою та світлом?
- Що спільного між музикою, світлом та синусоїдою?
  (Передбачувана відповідь: коливання, хвилі тощо).

Відео фрагмент "Функції синуса та косинуса в природі"

Вчитель: Коливання – рух, що повторюється в часі. Наприклад, коливання деяких об'єктів, таких як пружина, погойдування гілок дерева від вітру, вібрація струн музичних інструментів і, навіть, биття нашого серця, пульсація та мерехтіння зірок.

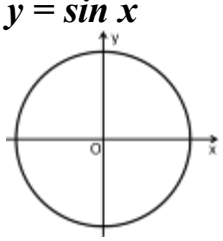
Перегляд відео-фрагменту про траєкторію коливання, що записується піском на рухомій стрічці, про звукову геометрію та просторові частоти, про розв'язок диференціального рівняння, отриманого експериментальним шляхом ($x = A\sin\omega \cdot t$), про осцилограф, амплітуду та частоту звуку. Оскільки тригонометричні функції дуже часто зустрічаються в природі, необхідно мати певні знання про них.

V. Робота з карткою контролю теоретичних знань

Вчитель проводить експрес-опитування: учні самостійно працюють в картках.

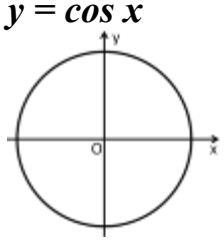
Варіант 1

1. Графік функції ***y = sin x*** називається……
2. Функція ***y = ctg x*** має період……, є ***парною*** *чи* ***непарною*** *?* *(потрібне підкреслити)*
3. Функція ***y = cos x*** має період……, є ***парною*** *чи* ***непарною*** *?* *(потрібне підкреслити)*
4. Графік функції **y = ctg x** ***проходить*** чи ***не проходить*** через початок координат *?* *(потрібне підкреслити)*
5. Графік функції ***y = cos x*** є симетричним відносно ***початку координат*** чи відносно ***осі Oy*** координат *? (потрібне підкреслити)*
6. На колі поставити знаки функції ***y = sin x***

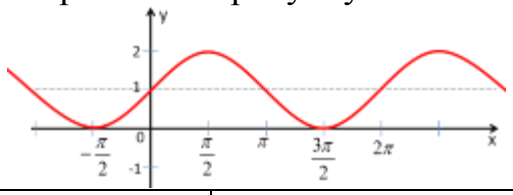


Варіант 2

1. Графік функції ***y = cos x*** називається……
2. Функція ***y = tg x*** має період…… , є ***парною*** *чи* ***непарною*** *?* *(потрібне підкреслити)*
3. Функція ***y = sin x*** має період……, є ***парною*** *чи* ***непарною*** *?* *(потрібне підкреслити)*
4. Графік функції **y = tg x** ***проходить*** чи ***не проходить*** через початок координат *?* *(потрібне підкреслити)*
5. Графік функції ***y = sin x*** є симетричним відносно ***початку координат*** чи відносно ***осі Oy*** координат *? (потрібне підкреслити)*
6. На колі поставити знаки функції ***y = cos x***



7. Позначте функцію, графік якої зображено на рисунку



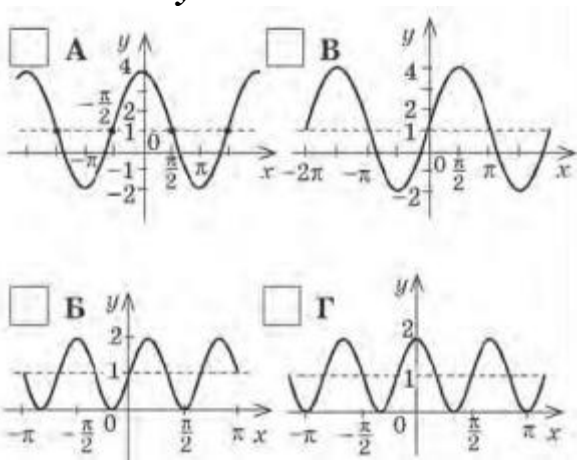
А. $y = \sin x + 1$	В. $y = \sin (x - 1)$	А. $y = 2\sin x$	В. $y = \sin 2x$
Б. $y = \cos x + 1$	Г. $y = \cos (x - 1)$	Б. $y = 2\cos x$	Г. $y = \cos 2x$

Мотивуючи роботу над карткою контролю теоретичних знань, вчитель націлює учнів на швидке виконання завдань і на наявність в ній проблемного завдання. Завдання №8 при вмінні виконувати побудови графіків функцій за допомогою перетворень в цілому доступне, але буде проблемним для більшості учнів. Вирішення проблемного завдання переноситься до основного етапу уроку – побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень

Проблемне завдання:

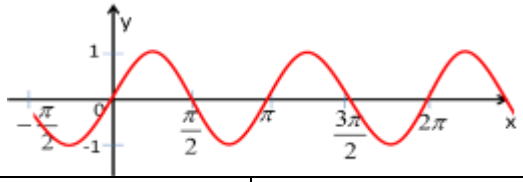
8. Позначте рисунок, на якому зображений графік функції :

$y = \cos 3x + 1$



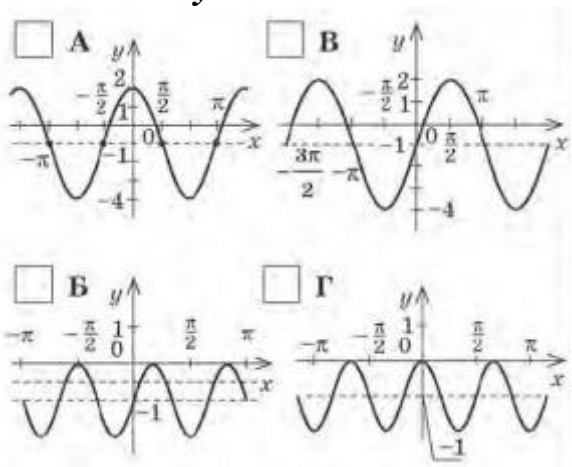
(Передбачувана відповідь: Г)

7. Позначте функцію, графік якої зображено на рисунку



8. Позначте рисунок, на якому зображений графік функції :

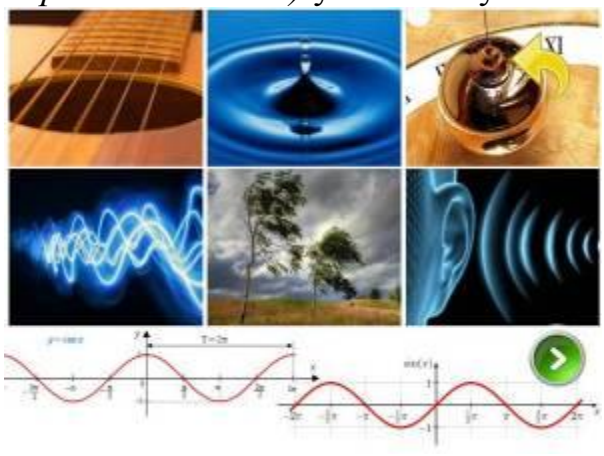
$y = 3\sin x - 1$



(Передбачувана відповідь: В)

VI. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень.

Вчитель: Виконуючи останнє завдання експрес-опитування (*картка контролю теоретичних знань)* у частини учнів виникли проблеми, можливо були помилки.



Чому так необхідно навчитися будувати такі графіки?

Функції синуса та косинуса – одні із самих важливих у світі, в природі тому, що велика кількість різноманітних явищ описуються саме цими функціями. Це різноманітні хвилі, як вже відмічали, коливання. Починаючи від хвиль на воді, сейсмічні хвилі (коливання, що поширюються в Землі від осередків землетрусів). Звук – тобто періодичні

коливання повітря. Крім цього всі електромагнітні хвилі. Це широкий спектр хвиль: теплові хвилі, інфрачервоні хвилі, радіохвилі, ультрафіолетові хвилі, різноманітні випромінювання, γ - промені тощо. Всі ці процеси описуються функціями синуса і косинуса. І найчастіше вони мають вигляд функцій гармонічного коливання: $y = A\sin(\omega \cdot t + \alpha)$, де A – амплітуда, $\omega \cdot t + \alpha$ – кут (фаза точки), $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – період гармонічного коливання, $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота коливання (§24 – гармонічні коливання). Переходимо до практичної частини уроку.

Завдання №1 Побудувати графік функції $y = 3\sin x - 1$

Розв'язання

$y = 3\sin x - 1$ – графік синусоїда.

Побудова графіка виконується на інтерактивній дошці із заготовленою системою координат. Повторюється масштаб по кожній вісі координат: по вісі Ох 3 клітинки - $\frac{\pi}{2}$, по вісі Оу 2 клітинки - *1. Додаткові побудови виконуються штриховою лінією, можна змінити колір лінії.*

План побудови:

1. Будуємо синусоїду $y = \sin x$ за стандартною таблицею значень:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

Функція непарна, графік симетричний відносно початку координат, нулі функції повторюються через 6 клітинок.

2. Будуємо графік функції $y = 3\sin x$, збільшуючи амплітуду (значення функції) в 3 рази.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	3	0	-3	0

3. Опускаємо кожну точку побудованого графіка на 1 одиницю (2 клітинки) вниз. Графік побудований!

Завдання №2 Побудувати графік функції $y = cos3x + 1$

Розв'язання

$y = cos3x + 1$ – графік косинусоїда.

Оскільки при виконанні останнього перетворення графіка функції (перенесенням графіка вниз), теж виникали проблеми, можна використати ще один прийом раціональних побудов. Для того, щоб підняти графік функції $y = cos3x$ на 1 одиницю (2 клітинки) вгору, можна опустити вісь на одиницю вниз.

План побудови:

1. Будуємо косинусоїду $y = cosx$ за стандартною таблицею значень в системі координат з уявною віссю Ох (штрихова лінія):

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	-1	0	1	0	-1

Функція парна, графік симетричний відносно вісі Оу, нулі функції повторюються через 6 клітинок.

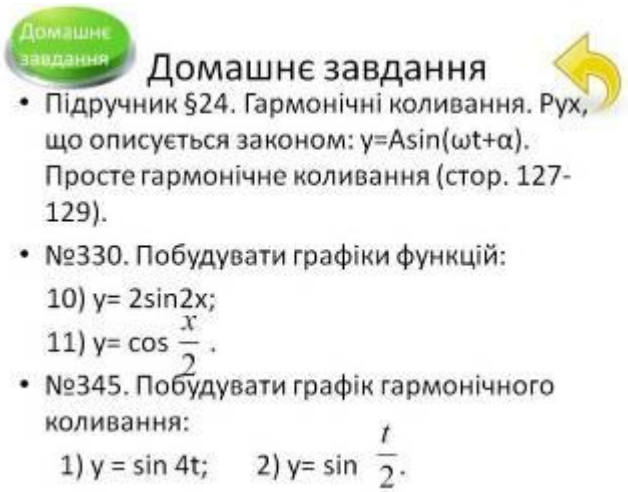
2. Для побудови графіка функції $y = cos3x$, обчислюємо період функції, переконуючись в тому, що графік треба стискати в 3 рази вздовж вісі Ох. $y = \cos 3x$, $k = 3$, отже, $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$. Був період 2π, а став $\frac{2\pi}{3}$. Графік стискається в 3 рази. Функція залишається бути парною, тобто графік симетричний відносно вісі Оу, нулі функції повторюються через 2 клітинки.

3. Опускаємо вісь Ох на 1 одиницю вниз (2 клітинки) вниз. Тим самим графіки функцій піднялися вгору. В новій системі координат останній побудований графік має рівняння шуканої функції $y = cos3x + 1$, а перший не $y = cosx$, а $y = cosx + 1$. Підписуємо графіки побудованих функцій.

Висновок: такий спосіб побудов не тільки вирішує проблему перенесення графіків вгору (вниз), але й скорочує кількість додаткових побудов.

VII. Підсумок уроку.

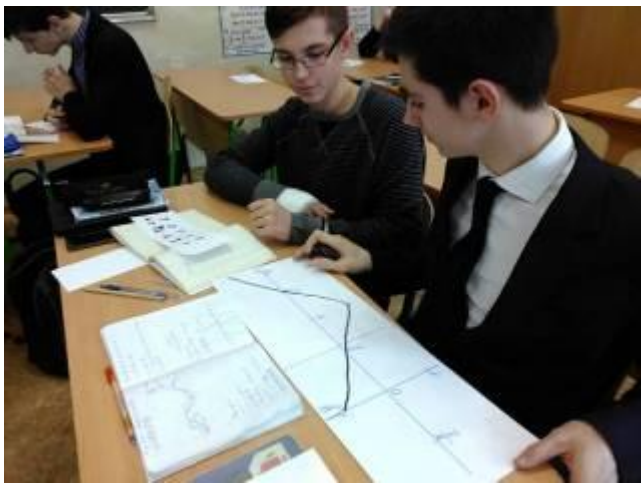
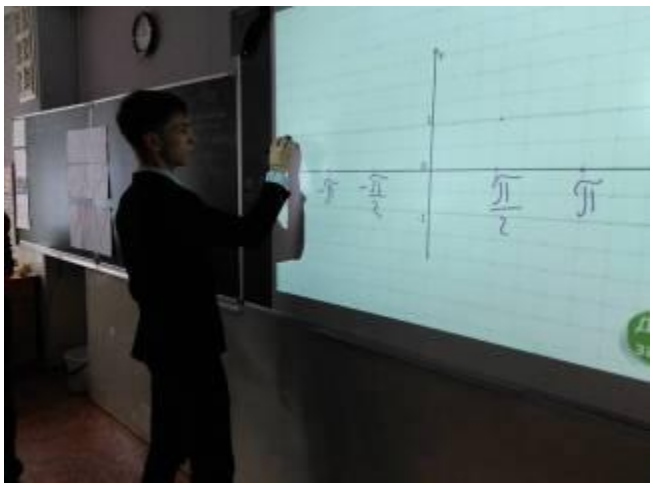
Підведення підсумку уроку. Оцінювання роботи учнів. Самооцінка учнів.



Урок проведено 23.02.2017 року в рамках місячника педагогічної творчості ***«Проблемне навчання – основа розвитку творчого мислення учня»,*** 10-А клас.

Присутні на уроці вчителі:
Козловська Л.С., Сайченко І.В., Богата В.М.

Урок опубліковано на сайті школи та на сайті вчителя.

1) Сайт вчителя математики Валентини Волошиної:
http://volochinaviv1.ucoz.ru/load/uroki/pobudova_grafikiv_trigonometrichnikh_funkcij/2-1-0-115

2) Сайт спеціалізованої школи №7 ім. М.Т.Рильського м. Києва:
http://sch7.ucoz.ua/load/z_dosvidu_vchiteliv_matematiki/pobudova_grafikiv_trigonometrichnikh_funkcij_pdf/16-1-0-78